

Convection mixte stationnaire autour d'un cylindre horizontal

M. AMAOUCHE and J.-L. PEUBE

L.E.S. 40, Avenue du Recteur Pineau, 86022 Poitiers—Cédex, France

(Reçu le 14 Mai 1984 et sous forme modifiée le 12 Novembre 1984)

Résumé—On considère le problème du transfert de chaleur par convection mixte stationnaire autour d'un cylindre horizontal isotherme, placé dans un écoulement forcé transversal. L'étude est basée sur la résolution numérique des équations complètes de Navier–Stokes. La méthode aux différences finies utilisée est une combinaison de la méthode hermitienne compacte $O(h^4)$ pour la résolution de l'équation de continuité et d'un schéma $O(h^2)$ pour la résolution des équations de transport de la vorticité et de l'énergie. Les nombres de Reynolds considérés sont faibles ($Re \leq 40$) et le paramètre Gr/Re^2 est de l'ordre de l'unité. Les résultats obtenus sont présentés pour un nombre de Prandtl de 0.73.

1. INTRODUCTION

LE TRANSFERT de chaleur autour d'un cylindre a fait l'objet de nombreux travaux en raison de ses multiples applications industrielles. Les résultats obtenus peuvent se transposer à des géométries planes plus complexes, moyennant des transformations conformes convenables. La détermination des lois de refroidissement pour le développement des techniques de thermo-an m trie et plus généralement la recherche du fonctionnement optimal des échangeurs tubulaires ont conduit les chercheurs à envisager différents aspects du problème. Diverses méthodes de résolution ont été proposées pour le calcul des cas limites des convections libre et forcée. Une bibliographie abondante, relative à ces questions peut être trouvée dans les réfs. [1–6]. Il n'existe par contre que très peu de travaux consacrés à l'étude du cas intermédiaire correspondant à la convection mixte, malgré son importance pratique et fondamentale. Jusqu'en 1970, on ne disposait que de quelques résultats expérimentaux. Dans le cas du fil chaud, Collis et William [7] se sont intéressés à l'évaluation de l'influence des effets de la convection libre sur ceux de la convection forcée. Il est généralement admis à la suite de leurs travaux et particulièrement à partir de ceux de Gebhart et Pera [8] que le mécanisme de transfert de chaleur est de type convection forcée dès que $Re > Gr^{1/3}$ à condition toutefois que le nombre de Reynolds soit de l'ordre de l'unité. Ces conditions sont largement vérifiées dans les techniques an m triques en raison du faible diamètre des sondes.

Pour les tubes, en écoulement symétrique, Oosthuizen et Madam [9] donnent une corrélation empirique pour le nombre de Nusselt, sous la forme

$$\overline{Nu}/\overline{Nu}_f = 1 + 0.18Gr/Re^2$$

$$-0.011(Gr/Re^2)^2 \text{ quand } Gr/Re^2 < 9.$$

Cette corrélation est en accord avec celle déduite par Jackson et Yen [10] à partir de corrélations existantes dans les cas limites. Tout récemment, un raffinement de

cette loi a été obtenu par Sunden [11]. Cet auteur met en évidence la forte dépendance de la structure de l'écoulement au paramètre Gr/Re^2 et au rapport des conductivités thermiques solide/fluide. Partant des équations de Prandtl, des solutions basées sur des développements en série de puissance de la variable azimutale, ont été proposées par Joshi et Sukhatme [12] et par Sparrow et Lee [13]. Merkin [14] utilise la méthode itérative de Newton–Raphson pour résoudre des équations transformées de la couche limite.

Les premières études expérimentales, tenant compte de l'effet de l'inclinaison de l'écoulement for  par rapport à la verticale, semblent être celles de Hatton *et al.* [15] pour les fils chauds, Sharna et Sukhatme [16] et Oosthuizen et Madam [17] pour les tubes.

Sharma et Sukhatme [16] proposent, pour le cas transversal, des critères de transition d'un régime de convection à l'autre et constatent que le paramètre Gr/Re^2 ne convient pas pour les corrélations.

Oosthuizen et Madam [17] donnent des résultats, sous forme graphique, pour différentes inclinaisons. Hatton *et al.* [15] proposent des corrélations, déduites du principe de sommation vectorielle, en accord avec leurs résultats expérimentaux. Des écarts notables apparaissent néanmoins dans le cas défavorable.

L'expérience de Fand et Keswani [18] a permis d'accéder à une gamme étendue du paramètre Gr/Re^2 correspondant à un large domaine de la convection mixte. Les résultats obtenus sont reliés approximativement à quatre zones et c'est dans la zone définie par $2 < Gr/Re^2 < 40$ que les effets des convections forcée et naturelle sont comparables. Dans une sous-région de celle-ci, le processus de transfert est instable quand la direction de l'écoulement for  est horizontale.

Dans des conditions expérimentales semblables, Bennon et Incropera [19] abordent le problème sur un système de plusieurs cylindres en milieu semi-confiné. Les résultats enregistrés y sont mis sous forme de corrélations. Dans leur expérience menée à des nombres de Reynolds modérés, Sarma et Sukhatme [20] étudient l'influence de la convection naturelle et du

NOTATIONS

C_x	coefficient de traînée
C_y	coefficient de portance
C_p	chaleur spécifique à pression constante
g	accélération de la pesanteur
Gr	nombre de Grashof, $8g\beta(T_p - T_\infty)\rho^2 R^3/\mu^2$
$G(y)$	$\pi \exp(\pi y)$
$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$	vecteurs unitaires
Nu	nombre de Nusselt local
\overline{Nu}	nombre de Nusselt global
\overline{Nu}_t	nombre de Nusselt global en convection forcée
P	pression réduite
Pr	nombre de Prandtl, $\mu C_p/\lambda$
R	rayon du cylindre
Re	nombre de Reynolds, $2R\rho U_\infty/\mu$
r_ω	paramètre de relaxation
T	température locale
U_0	vitesse de référence
U_∞	vitesse de l'écoulement uniforme
(u, v)	composantes de la vitesse locale
V	vitesse locale
(X, r)	coordonnées polaires
(X_1, Y_1)	coordonnées cartésiennes
(x, y)	coordonnées logarithmiques polaires
$(\Delta x, \Delta y)$	pas de discrétisation.

Lettres Grecques

β	coefficient de dilatation à pression constante
$(\varepsilon, \nu, \sigma)$	paramètres définis par (7)
ρ	masse volumique
μ	viscosité dynamique
λ	conductibilité thermique
(μ_m, λ_m)	paramètres optimaux de convergence
τ	précision du test de convergence
θ	température réduite
ω	vorticité
Ψ	fonction de courant.

Indices supérieurs

n	numéro d'itération
*	relatif au premier demi-pas.

Indices inférieurs

(i, j)	représente la valeur d'une fonction au point (x_i, y_j)
p	relatif à la paroi
∞	relatif à l'écoulement lointain
$x(\text{resp } y)$	désigne la dérivation par rapport à $x(\text{resp } y)$.

taux de turbulence amont sur le transfert de chaleur local. Le groupement $Gr/Re^{2.5}$ est utilisé comme paramètre de convection mixte.

Il ressort de cette revue bibliographique que les chercheurs se sont intéressés essentiellement à l'influence des différents paramètres sur l'aspect global du transfert de chaleur. L'aspect 'dynamique des écoulements de convection mixte' n'a été considéré que dans des cas particuliers, sur la base des méthodes de perturbation.

Wood [21] fût, à notre connaissance, le premier à avoir analysé le problème du fil chaud, à l'aide d'une méthode de développement asymptotique où le petit paramètre est Gr/Re^3 .

Le même problème a été repris par Nakai et Okazaki [22] qui ont proposé des solutions analytiques quand l'un des deux types de convection agit comme une perturbation.

Dans le cas général où les ordres de grandeur des termes responsables du mouvement sont comparables, la structure de l'écoulement devient fort complexe et difficile à analyser. Des modifications notables par rapport aux configurations limites apparaissent principalement dans le développement du sillage. Celui-ci peut disparaître complètement si le paramètre de la convection mixte Gr/Re^2 est suffisamment élevé. La région de convection mixte défavorable, située entre

le point le plus bas de l'obstacle et le point d'arrêt amont de l'écoulement forcé est également le siège de phénomènes complexes. Dans cette région les forces d'Archimède, jouent le rôle de gradients de pression défavorables. Elles y provoquent un décollement localisé, définissant alors une zone de stagnation, entourant le point de frottement nul, où les vitesses sont relativement faibles. Au dessus de cette zone, l'écoulement pariétale est plutôt imposé par les effets d'Archimède et c'est ainsi qu'apparaissent des courants de retour à proximité de la paroi. Le problème de la résolution des équations de Prandtl en mode direct, où la vitesse extérieure constitue une donnée, devient alors mal posé. Dans un traitement direct, l'épaisseur de déplacement deviendrait infinie à l'approche du point d'arrêt amont de l'écoulement forcé si l'on adopte une méthode intégrale où les calculs sont effectués à l'aide d'une représentation polynômiale de type Pohlhausen pour les profils de vitesse. L'effet de déplacement y serait alors important et réagirait fortement sur la distribution des vitesses dans l'écoulement visqueux.

Des méthodes de couplage fondées sur des équations de fluide parfait et des équations de type couche limite, résolues en forte interaction ont pu être développées même en présence de zones avec écoulement de retour. Cependant, le problème du démarrage du schéma itératif associé reste encore posé car la rupture de la

symétrie du problème conduit à la perte de la condition initiale nécessaire au traitement de tout problème d'évolution.

Une voie possible d'éviter ces difficultés, consiste à résoudre numériquement les équations complètes de Navier-Stokes. Tout récemment Badr [23] a résolu le problème de cette manière en développant la solution sur une base de Fourier. Dans la présente étude, le problème sera considéré à l'aide d'une méthode aux différences finies, combinaison d'un schéma hermitien compact $O(h^4)$ pour la résolution de l'équation de continuité et d'un schéma $O(h^2)$ pour les équations de transport de la vorticité et de la température.

2. POSITION DU PROBLEME

On se propose d'étudier les caractéristiques essentielles d'un écoulement laminaire et transversal de convection mixte autour d'un cylindre horizontal et isotherme. Le cylindre est supposé suffisamment long pour négliger les effets de bouts. L'écoulement au loin est uniforme et horizontal (Fig. 1). L'hypothèse d'un écoulement stationnaire nous conduit à ne considérer que des valeurs relativement faibles du nombre de Reynolds.

2.1. Equations de base

En régime laminaire et stationnaire et si l'on admet en outre l'hypothèse classique de Boussinesq, les équations qui décrivent les champs dynamique et thermique sont celles de Navier-Stokes couplées avec l'équation de transport de l'énergie.

Pour un écoulement bidimensionnel, elles s'écrivent :

$$\nabla\omega\wedge\nabla\Psi = \nu\Delta\omega\cdot\mathbf{K} + \varepsilon\nabla\theta\wedge\mathbf{J} \quad (1)$$

$$\Delta\Psi + \omega = 0 \quad (2)$$

$$\nabla\theta\wedge\nabla\Psi = \frac{\nu}{Pr}\Delta\theta\cdot\mathbf{K}. \quad (3)$$

La vorticité ω et la fonction de courant Ψ sont reliées à la vitesse \mathbf{V} par les relations :

$$\nabla\wedge\mathbf{V} = \omega\cdot\mathbf{K}; \quad \mathbf{V} = \nabla\wedge\Psi\mathbf{K}. \quad (4)$$

θ est la température réduite $(T - T_\infty)/(T_p - T_\infty)$, Pr désigne le nombre de Prandtl. Dans cette formulation, il apparaît clairement que l'existence d'un gradient non vertical de température induit nécessairement un

mouvement de convection naturelle. La pression n'y est pas indispensable pour déterminer les champs de vitesse et de température, elle peut être récupérée à l'aide de l'équation :

$$\frac{1}{2}\nabla(V^2 + p) = \varepsilon\theta\mathbf{J} - \omega\nabla\Psi - \nu\nabla\omega\wedge\mathbf{K}. \quad (5)$$

Les conditions aux limites associées aux équations (1)-(3) sont :

$$\theta = 1; \quad \Psi = 0; \quad \nabla\wedge\Psi\mathbf{K} = 0 \quad \text{sur le contour (c)}$$

$$\theta \rightarrow 0; \quad \omega \rightarrow 0; \quad \nabla\wedge\Psi\mathbf{K} \rightarrow \sigma \frac{U_\infty}{U_0} \text{ si } |X_1^2 + Y_1^2| \rightarrow \infty. \quad (6)$$

L'inconvénient majeur de cette formulation réside dans l'absence de condition pariétale physique pour l'équation de transport de la vorticité alors que l'on en dispose en surnombre pour la détermination de la fonction de courant.

La condition la plus couramment utilisée est déduite approximativement de l'équation de continuité, mais alors l'introduction d'un paramètre de sous-relaxation de la vorticité à la paroi semble nécessaire pour éviter des problèmes d'instabilité numérique, Quartapelle [24] propose une condition de type global de la forme :

$$\int_D \omega \cdot \xi \, ds = \int_{\partial D} \left(\Psi \frac{\partial \xi}{\partial n} - \xi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dl$$

avec $\Delta\xi = 0$ dans D .

Les équations et les conditions aux limites précédentes sont écrites en variables réduites. La géométrie et le problème thermique posé avec ses conditions aux limites nous ont conduit naturellement à adopter une dimension de l'obstacle (son rayon R) comme échelle des longueurs, et $\Delta T = T_p - T_\infty$ comme échelle des températures. Le choix de la vitesse de référence U_0 est par contre discutable. On ne connaît pas *a priori* la vitesse qui caractériserait au mieux l'écoulement. Les situations extrêmes suivantes peuvent être envisagées.

- $U_0 = U_\infty$: ce choix correspond à une situation où la convection forcée régit l'écoulement, les paramètres caractéristiques sont alors :

$$\nu = \frac{2}{Re}; \quad \varepsilon = (Gr/Re^2)/2 \quad \text{et} \quad \sigma = 1. \quad (7)$$

- $U_0 = (2g\beta\Delta T \cdot R)^{1/2}$: c'est le cas où la convection naturelle est prépondérante.

$$\nu = 2/Gr^{1/2}; \quad \varepsilon = \frac{1}{2}; \quad \sigma = Re/Gr^{1/2}. \quad (8)$$

Gr et Re sont les nombres de Grashof et de Reynolds basés sur le diamètre du cylindre. Les régimes d'écoulement considérés ici correspondent à la première situation.

2.2. Equations transformées

Les équations (1)-(3) et (6) sont traduites dans un système de coordonnées polaires logarithmiques que

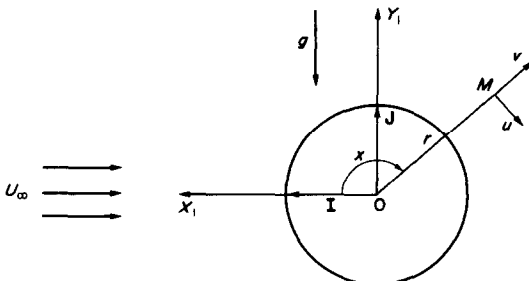


FIG. 1. Géométrie du problème.

l'on définit par la transformation :

$$x = X/\pi; \quad y = \log r/\pi. \quad (9)$$

Cette transformation est particulièrement bien adaptée à la géométrie circulaire et à l'emploi d'un maillage à pas variable qui s'avère indispensable lorsque les gradients sont concentrés près des parois. Un maillage non uniforme, resserré près de l'obstacle dans le plan physique, correspond à un maillage uniforme dans le plan (x, y) . En outre, elle permet de garder la forme cartésienne des équations qui deviennent :

$$\Psi_x \omega_y - \Psi_y \omega_x = \nu \Delta \omega + \varepsilon G(y) (\cos \pi x \cdot \theta_y - \sin \pi x \cdot \theta_x) \quad (10)$$

$$\Delta \Psi + G^2 \cdot \omega = 0 \quad (11)$$

$$\Psi_x \theta_y - \Psi_y \theta_x = (\nu/Pr) \Delta \theta \quad (12)$$

avec : $G(y) = \pi \exp(\pi y)$ et $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$.

Conditions aux limites

$$\begin{aligned} y = 0; \quad \theta = 1; \quad \Psi = 0; \quad \Psi_x = 0; \quad \Psi_y = 0; \\ \omega \cdot \pi^2 + \Psi_{yy} = 0; \quad y \rightarrow \infty; \quad \theta \rightarrow 0; \quad \omega \rightarrow 0; \quad (13) \\ \Psi_x \rightarrow -\sigma G(y) \cos \pi x; \quad \Psi_y \rightarrow -\sigma G(y) \sin \pi x. \end{aligned}$$

3. MODELE NUMERIQUE

Bien que l'étude soit limitée au régime stationnaire, les équations sont traitées sous forme transitoire de manière à les rendre paraboliques. La solution stationnaire est obtenue comme limite lorsque le temps devient infini, des équations instationnaires avec un état initial arbitraire. La progression dans le temps est alors réalisée par un schéma A.D.I. Le traitement compact précis à l'ordre 4 est utilisé pour déterminer la fonction de courant. Les équations de transport de l'énergie et de la vorticité sont traités par une méthode précise d'ordre 2. Les avantages de cet algorithme mixte sont discutés dans les réfs. [25–27]. Le schéma global de résolution se résume comme suit :

A partir des valeurs $\omega_{i,j}^n$ et $\Psi_{i,j}^n$ à l'étape n , on détermine $\Psi_{i,j}^{n+1}$ en résolvant l'équation de continuité. La température $\theta_{i,j}^n$ et la fonction de courant $\Psi_{i,j}^{n+1}$ servent ensuite à calculer $\theta_{i,j}^{n+1}$. $\omega_{i,j}^{n+1}$ est enfin déduit du triplet $(\omega_{i,j}^n, \theta_{i,j}^{n+1}, \Psi_{i,j}^{n+1})$ en considérant l'équation de transport de la vorticité.

Le processus itératif continue ainsi jusqu'à convergence de la suite $\omega_{i,j}^n$.

3.1. Résolution de l'équation de continuité

L'équation de continuité est résolue par le procédé A.D.I. optimisée [28]. Celle-ci se caractérise par un fractionnement du pas de temps auquel sont associées les deux relations suivantes :

$$\frac{1}{\lambda_n} (\Psi_{i,j}^{*n} - \Psi_{i,j}^n) = \frac{\delta^2 \Psi^*}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \Psi^n}{\delta x^2} + G_j^2 \omega_{i,j}^n \quad (14)$$

$$\frac{1}{\mu_n} (\Psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^*) = \frac{\delta^2 \Psi^*}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \Psi^{n+1}}{\delta x^2} + G_j^2 \omega_{i,j}^n \quad (15)$$

λ_n et μ_n sont des paramètres optimaux de convergence d'un schéma centré classique $O(h^2)$.

Les opérations différentielles $\partial^2/\partial x^2$ et $\partial^2/\partial y^2$ sont approchés par les opérations aux différences $\delta^2/\delta x^2$ et $\delta^2/\delta y^2$ à l'ordre 4 par l'utilisation de relations additionnelles de la forme :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta^2 \Psi^*}{\delta y^2} \right)_{i,j-1} + 10 \left(\frac{\delta^2 \Psi^*}{\delta y^2} \right)_{i,j} + \left(\frac{\delta^2 \Psi^*}{\delta y^2} \right)_{i,j+1} \\ = \frac{12}{\Delta y^2} (\Psi_{i,j+1}^* - 2\Psi_{i,j}^* + \Psi_{i,j-1}^*) + O(\Delta y^4) \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta^2 \Psi^{n+1}}{\delta x^2} \right)_{i-1,j} + 10 \left(\frac{\delta^2 \Psi^{n+1}}{\delta x^2} \right)_{i,j} + \left(\frac{\delta^2 \Psi^{n+1}}{\delta x^2} \right)_{i+1,j} \\ = \frac{12}{\Delta x^2} (\Psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i-1,j}^{n+1}) + O(\Delta x^4) \quad (17) \end{aligned}$$

Nous sommes ainsi conduits à la résolution d'un système linéaire tridiagonal pour la détermination de la quantité intermédiaire $\Psi_{i,j}^*$. Le calcul de $\Psi_{i,j}^{n+1}$ se déduit de la résolution d'un système linéaire cyclique où l'algorithme de Thomas s'applique moyennant quelques manipulations algébriques élémentaires.

La détermination des dérivées Ψ_x^{n+1} et Ψ_y^{n+1} en vue de leur utilisation dans les équations de transport, résulte des relations hermitiennes compactes suivantes :

$$\begin{aligned} (\Psi_x)_{i-1,j} + 4(\Psi_x)_{i,j} + (\Psi_x)_{i+1,j} \\ = \frac{3}{\Delta x} (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}) + O(\Delta x^4) \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Psi_y)_{i,j-1} + 4(\Psi_y)_{i,j} + (\Psi_y)_{i,j+1} \\ = \frac{3}{\Delta y} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) + O(\Delta y^4). \quad (19) \end{aligned}$$

Les composantes de vitesse suivant les directions x, y sont données respectivement par :

$$u = -\frac{1}{G(y)} \Psi_y \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{G(y)} \Psi_x. \quad (20)$$

3.2. Résolution de l'équation de l'énergie

La résolution de l'équation de l'énergie se fait avec un schéma aux différences finies $O(h^2)$. L'avancement dans le temps est réalisé, comme pour la fonction de courant, par la technique des directions alternées. L'application de cette dernière à la résolution des équations non linéaires de transport est souvent soumise à une condition de type C.F.L. bien que l'analyse linéaire conduise à une stabilité inconditionnelle.

C'est la perte du caractère dominant de la diagonale des matrices résultantes par suite de l'importance des effets convectifs, qui entraîne la limitation du pas de temps. Il est donc nécessaire, pour assurer la stabilité numérique, d'avoir affaire à des matrices bien conditionnées telle que leur inversion soit possible.

Le schéma que nous proposons, basé sur le nombre de Reynolds Re_m relatif à l'échelle de maille, permet le respect des critères de consistance et de stabilité tout en maintenant la dominance diagonale.

Les termes de convection sont approchés par des schémas centrés classiques, et quand la stabilité risque d'être mise en cause, on utilise des schémas $O(h^2)$, décentrés dans le sens de la vitesse. Ainsi, il vient lors du premier demi pas, lorsque la direction y est débloquée :

$$(a) \quad \Psi_x^{n+1} \theta_y^* = (\Psi_x^{n+1})_{i,j} \frac{\theta_{i,j+1}^* - \theta_{i,j-1}^*}{2\Delta y} + O(\Delta y^2) \quad \text{si } Re_m < 2$$

avec $Re_m = Pr \frac{\Delta y}{\nu} (\Psi_x^{n+1})_{i,j}$ (21)

$$(b) \quad \Psi_x^{n+1} \theta_y^* = \frac{1}{4\Delta y} \left(-[\Psi_x]_{i,j} + [\Psi_x]_{i,j-1} + (\Psi_x)_{i,j} + (\Psi_x)_{i,j-1} \right] \theta_{i,j-1}^* + [2|\Psi_x|_{i,j} + |\Psi_x|_{i,j+1} + |\Psi_x|_{i,j-1} + (\Psi_x)_{i,j-1} - (\Psi_x)_{i,j+1}] \theta_{i,j}^* - [\Psi_x]_{i,j} + |\Psi_x|_{i,j+1} - (\Psi_x)_{i,j} - (\Psi_x)_{i,j+1}] \theta_{i,j+1}^* \Bigg) + \frac{1}{4 \cdot \Delta y} \times [|\Psi_x|_{i,j} + |\Psi_x|_{i,j-1}] \theta_{i,j-1}^* - [2|\Psi_x|_{i,j} + |\Psi_x|_{i,j+1} + |\Psi_x|_{i,j-1}] \theta_{i,j}^* + [|\Psi_x|_{i,j+1}] \theta_{i,j+1}^* + O(\Delta y^2)$$

si $Re_m > 2$. (22)

Le même procédé est utilisé lors du deuxième demi-pas pour la discrétisation du terme $\Psi_y^{n+1} \cdot \theta_x^{n+1}$, le Reynolds de maille est dans ce cas $Re_m = Pr(\Delta x/\nu) (\Psi_y^{n+1})_{i,j}$. Ce schéma peut en particulier s'appliquer dans le cas stationnaire à des écoulements à grand nombre de Prandtl. La qualité du schéma décentré $O(h^2)$ a été mise en évidence sur un problème test ; l'équation stationnaire monodimensionnelle de Burger dont on connaît les solutions exactes.

Les résultats sont satisfaisants ; ceux obtenus par un schéma Upwind $O(h)$ sont irréalistes dans la zone de couche limite par suite de l'introduction d'une viscosité numérique alors que le schéma centré $O(h^2)$ diverge pour les grandes valeurs du Reynolds.

3.3. Résolution de l'équation de la vorticité

Le schéma de résolution est le même que celui décrit précédemment. Les termes de poussées d'Archimède sont discrétisés à chacune des deux étapes du schéma A.D.I. par :

$$\varepsilon G(y)(\cos \pi x \cdot \theta_y - \sin \pi x \cdot \theta_x) = \varepsilon G_j(\cos \pi(i-1)\Delta x \cdot \frac{\theta_{i,j+1}^{n+1} - \theta_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} - \sin \pi(i-1)\Delta x \cdot \frac{\theta_{i+1,j}^{n+1} - \theta_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2, \Delta y^2)). \quad (23)$$

3.4. Traitement des conditions aux limites

Conditions pariétales. On choisit pour des raisons de simplicité et de temps de calcul de conserver pour Ψ la condition de Dirichlet, soit ($\Psi = 0$) sur la paroi. Dans la formulation utilisée, le principal problème aux limites qui reste posé est de trouver une condition pariétale pour la vorticité. Plusieurs relations, toutes basées sur le développement de Taylor des fonctions Ψ et ω sont proposées pour traduire l'équation de continuité à la paroi.

Les expressions les plus couramment utilisées sont, compte tenu des conditions d'adhérence :

— Relation de Hirsch :

$$\omega_{i,1} = -\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{12}{\Delta y^2} \Psi - \frac{6}{\Delta y} \Psi_y + \Psi_{yy} \right)_{i,2} + O(\Delta y^3) \quad (24)$$

— Relation de Woods :

$$\omega_{i,1} + \frac{1}{2}\omega_{i,2} = -\frac{3}{\pi^2 \Delta y^2} \Psi_{i,2} + O(\Delta y^2) \quad (25)$$

— Relation de Jensen :

$$\omega_{i,1} = \frac{1}{2\pi^2 \Delta y^2} (\Psi_{i,3} - 8\Psi_{i,2}) + O(\Delta y^2). \quad (26)$$

C'est cette dernière relation que nous avons retenue.

Afin d'améliorer la stabilité du calcul, il apparaît préférable de sous-relaxer l'approximation (26) par l'introduction d'un paramètre r_ω .

$$\omega_{i,1}^{n+1} = (1 - r_\omega) \omega_{i,1}^n + r_\omega \omega_{i,1}, \quad 0 < r_\omega < 1 \quad (27)$$

Condition à l'infini. La condition d'uniformité de l'écoulement ne peut être rigoureusement satisfaite qu'à l'infini. En imposant cette condition à distance finie, puisque le domaine d'intégration numérique est forcément limité, il se produit une sorte de confinement de l'écoulement d'autant plus affecté que la frontière extérieure est proche de l'obstacle. L'application de cette condition nécessite de choisir r_ω suffisamment grand, de l'ordre de 100, pour que l'écoulement simulé reste indifférent à ce paramètre.

La limitation du domaine d'intégration, afin de réduire le temps de calcul nécessite donc une correction des conditions d'uniformité de l'écoulement. Diverses expressions sont disponibles dans la littérature.

Phuoc-Loc [25, 29] et Patel [30] utilisent comme limites la fonction de courant et la vorticité de l'écoulement potentiel, à savoir :

$$\Psi(x, y_\infty) = -2\sigma \sinh(\pi y_\infty) \cdot \sin \pi x$$

$$\omega(x, y_\infty) = 0. \quad (28)$$

Braza *et al.* [31] font usage d'une approximation de type gradient non nul correspondant à la solution d'ordre 1 de l'écoulement d'Oseen pour la vorticité et proposent une correction de la fonction de courant de l'écoulement potentiel quand le problème est instationnaire. Dans le cadre d'un problème de convection forcée, Apelt et Ledwich [4] ont également utilisés des

conditions de type gradient non nul pour la vorticité et la température alors que la fonction de courant est celle de l'écoulement uniforme. D'autres expressions, plus complètes sont aussi employées [11, 32, 33]. Celles-ci sont déduites des solutions asymptotiques obtenues par Imai [31], leur application est cependant rendue délicate par l'introduction du coefficient de trainée. Les relations suivantes, dont la mise en oeuvre est relativement aisée, sont retenues dans la présente étude.

- Condition de Dirichlet pour Ψ avec utilisation de la relation (28)
- Condition de Neumann homogènes pour ω et θ

$$\omega_y(x, y_\infty) = \theta_y(x, y_\infty) = 0.$$

4. CARACTÉRISTIQUES DU CALCUL

Le maillage. Le maillage utilisé dans le plan transformé est supposé uniforme, il est défini par :

$$x_i = (i-1)\Delta x \quad 1 \leq i \leq N \quad (N = 60)$$

$$y_j = (j-1)\Delta y \quad 1 \leq j \leq M \quad (M = 40)$$

avec $\Delta x = \Delta y = 2/N$.

Le rayon de la frontière extérieure est dans ces conditions : $r_\infty = 59,387$.

Test d'arrêt. On estime que le régime stationnaire est atteint lorsque la suite ω_{ij}^n converge. Le critère de convergence retenu est basé sur la norme du maximum.

$$\text{MAX}_{ij} |\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^n| < \tau \quad \tau = 10^{-4}$$

un test fixant le nombre maximum d'itérations permises est également prévu.

Choix du prédicteur. Le prédicteur $(\omega_{i,j}^{(0)}, \theta_{i,j}^{(0)}, \Psi_{i,j}^{(0)})$ nécessaire au démarrage du processus itératif est *a priori* arbitraire. Son choix est fondamental quant à la rapidité de la convergence vers l'état stationnaire et dépend beaucoup des valeurs des paramètres Re et Gr . Un gain appréciable sur le nombre d'itérations est réalisé en choisissant pour prédicteur le résultat d'un calcul antérieur correspondant à des nombres Re et Gr plus faibles. C'est le régime presque conducteur qui a d'abord été calculé à partir de l'état de repos.

Rôle des pas de temps fictifs. Il est apparu clairement, d'après les essais numériques, que le choix des pas de temps jouant le rôle de paramètres de relaxation est absolument capital. Le nombre d'itérations pour obtenir une précision donnée dépend essentiellement des valeurs de ces paramètres. Les valeurs optimales sont d'autant plus difficiles à déterminer que la précision imposée est plus grande. Elles dépendent en outre d'un grand nombre de facteurs parmi lesquels on retient notamment les nombres Gr , Re et les caractéristiques du maillage. Les pas de temps adoptés sont voisins des conditions optimales de convergence. Dans tous les cas, le pas de temps thermique est pris égal à 2 fois le pas de temps dynamique, celui-ci augmentant d'une manière empirique avec les paramètres Re et Gr .

5. RESULTATS

Les calculs ont été effectués dans le cas de l'air ($Pr = 0,73$), pour des nombres de Reynolds $Re = 5, 10, 20, 30, 40$ et des paramètres de convection mixte Gr/Re^2 allant de 0 à 5.

Sur les Figs. 2(a), (b) et (c) nous avons porté l'évolution du tourbillon à la paroi (frottement pariétal) en fonction de la position angulaire pour $Re = 5, 10, 20$ et $Gr/Re^2 = 0, 2, 4$. C'est cette grandeur qui détermine le champ du tourbillon dans tout le domaine. Elle conditionne donc la structure de l'écoulement et fixe en particulier son sens au niveau de la paroi.

L'effet des variations des paramètres Gr/Re^2 est sensiblement le même quelque soit Re , sa croissance conduit à l'augmentation du frottement pariétal sur la majeure partie de la paroi. Il est important de souligner que la configuration de l'écoulement pariétal tend progressivement vers un régime de convection naturelle lorsque Gr/Re^2 augmente ; ceci se manifeste en particulier par le déplacement des points d'arrêt amont et aval respectivement vers les points le plus bas et le plus haut de l'obstacle. Ces effets sont d'autant plus significatifs que le nombre de Reynolds est faible. Nous remarquons bien aussi l'absence totale de zone de recirculation pour les régimes envisagés, les lignes de courant épousent la forme de l'obstacle. On constate cependant, pour les très faibles valeurs de Gr/Re^2 l'existence d'une nappe tourbillonnaire attachée à la paroi inférieure aval ; sa taille diminue quand Gr/Re^2 augmente. Cette structure est observée pour $Gr/Re^2 = 0,25$ quand $Re = 20$ mais disparaît quand Gr/Re^2 est voisin de 0,5. Pour des valeurs plus élevées de Re , cette nappe tourbillonnaire persiste jusqu'à des valeurs plus grandes de Gr/Re^2 .

Les lignes de courant, les isothermes, les profils de vitesse et de température que nous n'avons pas reportés ici, mettent en évidence l'influence profonde du paramètre Gr/Re^2 sur la structure générale de l'écoulement.

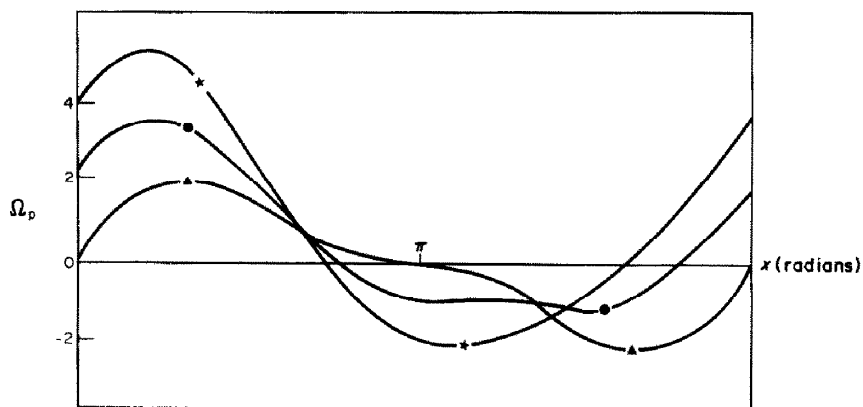
Les figures 3(a), (b) et (c) représentent la distribution angulaire de la pression pariétale réduite $[P(x) - P_\infty]/\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ notée $P(x)$, son expression est donnée par la relation :

$$P(x) = P(0) + \frac{4}{Re} \int_0^x \frac{\partial \omega}{\partial y} dx + \frac{Gr}{Re^2} \sin \pi x$$

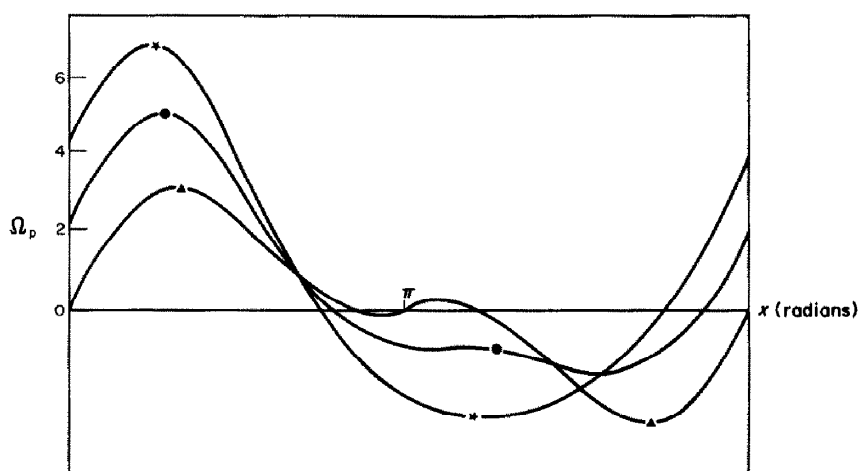
avec

$$P(0) = 1 + 2 \int_0^\infty \left(\omega \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{2}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{0,y} dy.$$

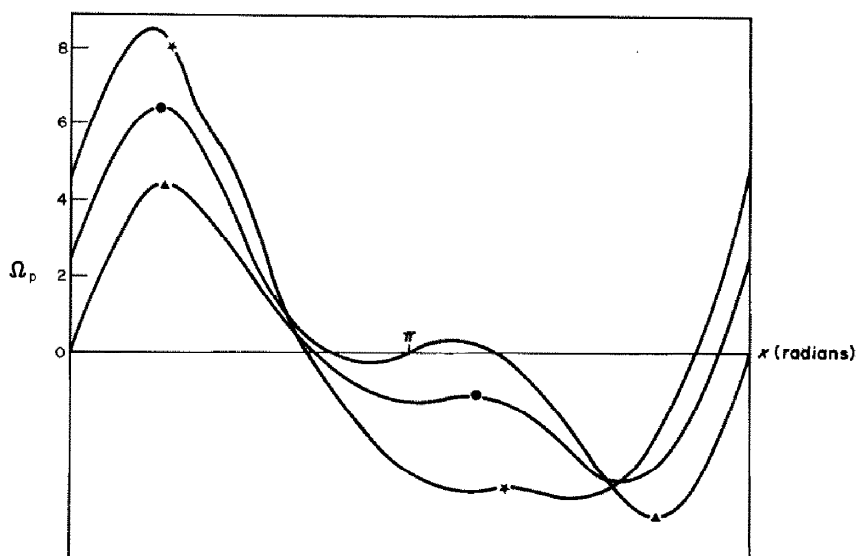
$P(0)$ est la pression réduite au point d'arrêt de l'écoulement forcé. A Re fixé, la pression est fortement influencée par la groupement Gr/Re^2 , elle varie dans le sens inverse de ce paramètre. Si les gradients de pression sont élevés sur la face amont, on constate en revanche et essentiellement aux faibles valeurs de Re , l'existence d'un palier de dépression occupant la quasi-totalité de la face arrière. Ce palier se déforme au fur et à mesure que Re augmentée et on remarque alors l'apparition



(a)



(b)



(c)

FIG. 2. Variation du coefficient de frottement le long de la paroi. \blacktriangle , $Gr/Re^2 = 0$; \bullet , $Gr/Re^2 = 2$; \star , $Gr/Re^2 = 4$; (a) $Re = 5$; (b) $Re = 10$; (c) $Re = 20$.

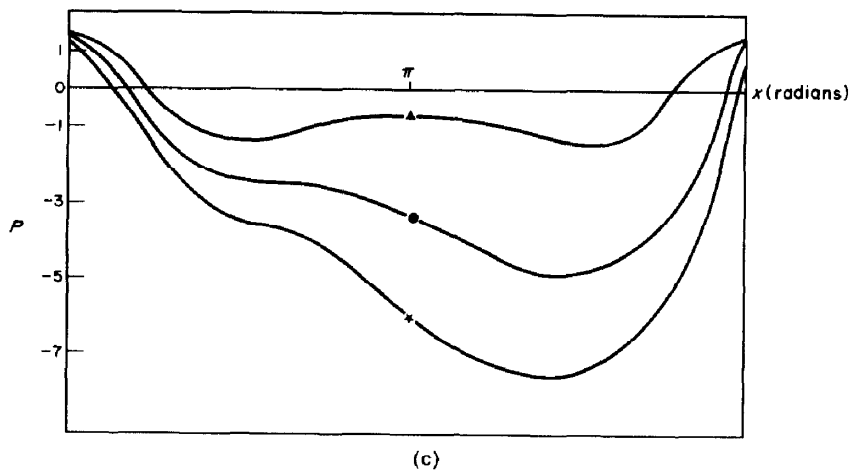
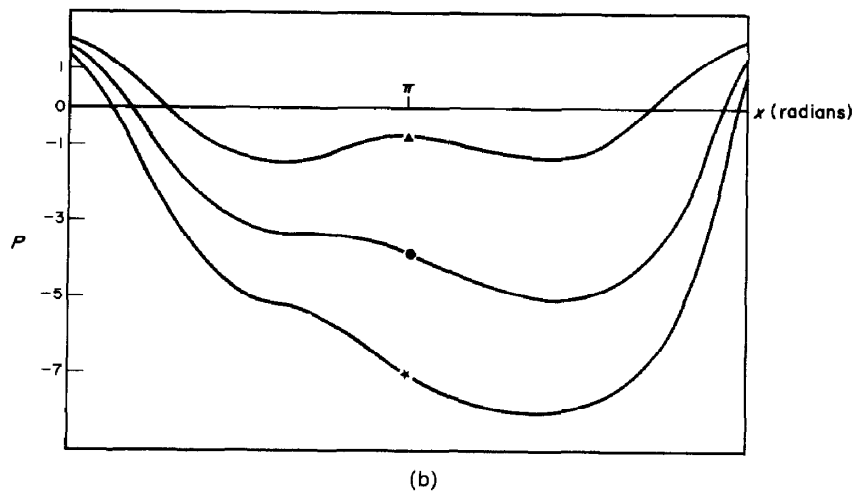
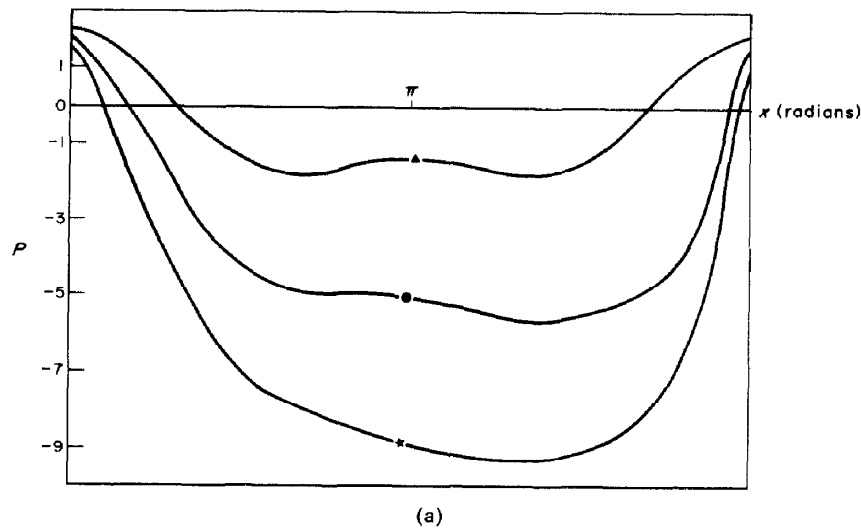


FIG. 3. Distribution de la pression à la paroi. (a) $Re = 5$; (b) $Re = 10$; (c) $Re = 20$. \blacktriangle , $Gr/Re^2 = 0$; \bullet , $Gr/Re^2 = 2$; \star , $Gr/Re^2 = 4$.

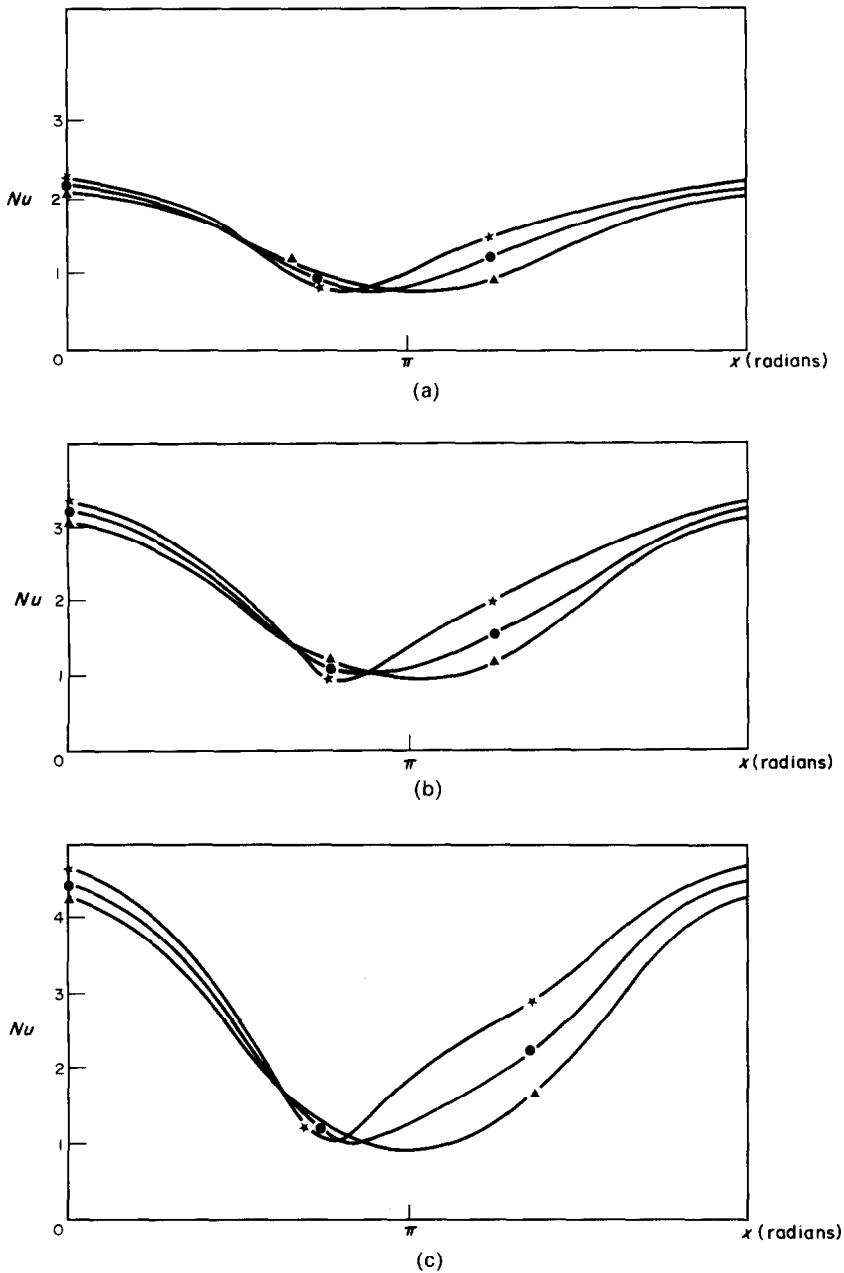


FIG. 4. Distribution du nombre de Nusselt local. (a) $Re = 5$; (b) $Re = 10$; (c) $Re = 20$. \blacktriangle , $Gr/Re^2 = 0$; \bullet , $Gr/Re^2 = 2$; \star , $Gr/Re^2 = 4$.

progressive d'un minimum de pression situé légèrement en aval du point le plus bas de l'obstacle. Les efforts de pression et de frottement exercés sur l'obstacle peuvent être caractérisés par les coefficients de traînée et de portance. Après quelques calculs élémentaires on obtient les formules suivantes :

$$C_x = \frac{2}{Re} \int_0^2 \left(\pi \cdot \omega - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \sin \pi x \cdot dx$$

$$C_y = \frac{2}{Re} \int_0^2 \left(\pi \cdot \omega - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \cos \pi x \cdot dx - \frac{\pi}{2} \frac{Gr}{Re^2}.$$

Les courbes de variations de ces grandeurs globales en fonction du paramètre de convection mixte sont tracées sur les Figs. 5 et 6. Pour $Re = 10$ et 20 la croissance de C_x est monotone. Pour $Re = 5$, la courbe semble présenter d'abord un minimum pour $Gr/Re^2 = 0.5$ pour croître ensuite régulièrement. Dans tous les cas, les variations sont lentes pour $Gr/Re^2 < 1$. Le coefficient de portance est pratiquement linéaire sauf pour les grandes valeurs de Re où la non linéarité commence à prendre de l'importance.

Le transfert de chaleur entre l'obstacle et le fluide peut être caractérisé par le nombre de Nusselt local Nu

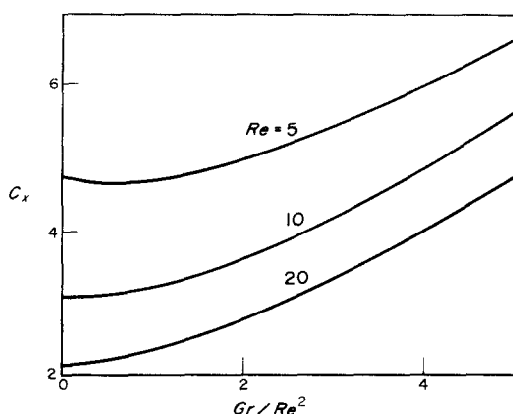


FIG. 5. Variation du coefficient de traînée en fonction de Gr/Re^2 .

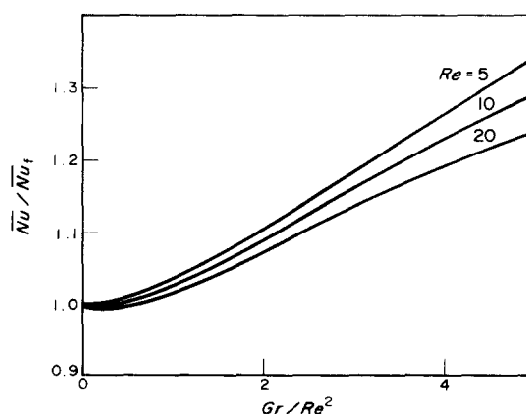


FIG. 7. Variations du nombre de Nusselt global relatif en fonction de Gr/Re^2 .

et global \bar{Nu} que l'on définit respectivement par les relations :

$$Nu = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \text{et} \quad \bar{Nu} = \frac{1}{2} \int_0^2 Nu \cdot dx.$$

Les courbes des Figs. 4(a), (b) et (c) indiquent les variations angulaires du Nusselt local et son évolution en fonction de Gr/Re^2 . Le transfert local, très important sur la partie amont, décroît lorsque l'on se déplace vers l'arrière pour atteindre un minimum dont la position angulaire dépend de Gr/Re^2 . Ce minimum tend vers le point le plus haut de l'obstacle quand ce paramètre augmente.

L'effet de Gr/Re^2 est de modifier le nombre de Nusselt local en n'améliorant que légèrement l'échange presque partout à l'amont.

On observe en revanche un gain important du transfert sur la partie inférieure aval.

L'évolution du \bar{Nu} , rapporté au Nusselt global de la convection forcée \bar{Nu}_t représentée sur la Fig. 7 est marquée par :

- une décroissance avec Re , le paramètre Gr/Re^2 étant maintenu constant.
- une croissance avec Gr/Re^2 , à nombre Re fixé, d'autant plus significative que Gr/Re^2 est grand.

6. CONCLUSION

Les calculs précédents ont été entrepris pour permettre d'évaluer l'influence des effets de poussée d'Archimède sur la structure d'un écoulement transversal autour d'un cylindre horizontal isotherme. La méthode numérique mise en oeuvre est une combinaison de la méthode hermitienne compacte $O(h^4)$ et d'un schéma $O(h^2)$. Les résultats ainsi obtenus, aussi bien localement que globalement sont dans l'ensemble en bon accord avec ceux obtenus par Badr [23].

REFERENCES

1. H. Koyama and A. Nakayama, An integral method in free convection flows under non-uniform gravity, *Lett. Heat Mass Transfer* **9**, 151–158 (1982).
2. B. Farouk and S. I. Guceri, Natural convection from a horizontal cylinder laminar regime, *J. Heat Transfer* **103**, 522–526 (1981).
3. T. H. Kuehn and R. J. Goldstein, Numerical solution to the Navier–Stokes equations for laminar natural convection about a horizontal isothermal circular cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer* **23**, 971–979 (1980).
4. C. J. Apelt and M. A. Ledwich, Heat transfer in transient and unsteady flows past a heated circular cylinder in the range $1 \leq Re \leq 40$, *J. Fluid Mech.* **95**, 761–777 (1979).
5. D. B. Ingham, Free convection boundary layer on an isothermal horizontal cylinder, *Z. angew. Math. Phys.* **29**, 871–883 (1978).
6. S. Nakai and T. Okazaki, Heat transfer from a horizontal circular wire at small Reynolds and Grashof numbers I, *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 387–396 (1975).
7. D. C. Collis and M. J. Williams, Two dimensional convection from heated wires at low Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* **6**, 357–385 (1959).
8. B. Gebhart and L. Pera, Mixed convection from long horizontal cylinders, *J. Fluid Mech.* **45**, 49–64 (1970).
9. P. H. Oosthuizen and S. Madan, Combined convective

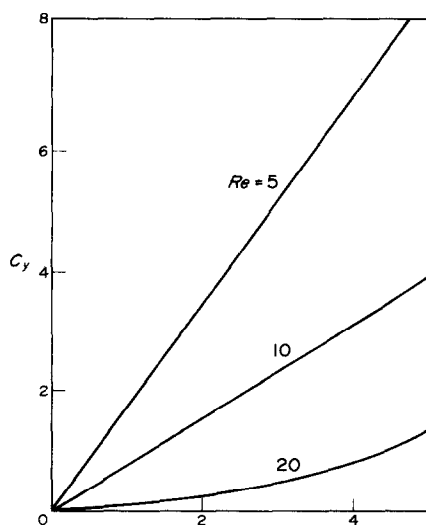


FIG. 6. Variation du coefficient de portance en fonction de Gr/Re^2 .

- heat transfer from horizontal cylinders in air, *J. Heat Transfer* **92**, 194–196 (1970).
10. T. W. Jackson and H. H. Yen, Combined forced and free convective equations to represent combined heat-transfer coefficients for a horizontal cylinder, *J. Heat Transfer* **93**, 247–248 (1971).
 11. B. Sunden, Influence of buoyancy forces and thermal conductivity on flow field and heat transfer of circular cylinders at small Reynolds numbers, *Int. J. Heat Transfer* **26**, 1329–1338 (1983).
 12. N. D. Joshi and S. P. Sukhatme, An analysis of combined free and forced convection heat transfer from a horizontal circular to a transverse flow, *J. Heat Transfer* **93**, 441–447 (1971).
 13. E. M. Sparrow and L. Lee, Analysis of mixed convection about a horizontal cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, 229–231 (1976).
 14. J. H. Merkin, Mixed convection from a horizontal circular cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer* **20**, 73–76 (1977).
 15. A. P. Hatton, D. D. James and H. W. Swire, Combined forced and natural convection with low-speed air flow over horizontal cylinders, *J. Fluid Mech.* **42**, 17–31 (1970).
 16. G. K. Sharma and S. P. Sukhatme, Combined free and forced convection heat transfer from a heated tube to a transverse air stream, *J. Heat Transfer* **91**, 457–459 (1969).
 17. P. H. Oosthuizen and S. Madan, The effect of flow direction on combined convective heat transfer from cylinders to air, *J. Heat Transfer* **103**, 240–242 (1971).
 18. R. M. Fand and K. K. Keswani, Combined natural and forced convection heat transfer from horizontal cylinders to water, *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**, 1175–1191 (1973).
 19. W. D. Bennon and F. P. Incropera, Mixed convection heat transfer from horizontal cylinders in the crossflow of a finite water layer, *J. Heat Transfer* **103**, 540–545 (1981).
 20. T. S. Sarma and S. P. Sukhatme, Local heat transfer from a horizontal cylinder to air in cross flow: influence of free convection and free stream turbulence, *Int. J. Heat Mass Transfer* **20**, 51–56 (1977).
 21. W. W. Wood, Free and forced convection from fine hot wires, *J. Fluid Mech.* **55**, 419–438 (1972).
 22. S. Nakai and T. Okazaki, Heat transfer from a horizontal circular wire at small Reynolds and Grashof numbers II, mixed convection, *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 397–413 (1975).
 23. H. M. Badr, A theoretical study of laminar mixed convection from a horizontal cylinder in a cross stream, *Int. J. Heat Mass Transfer* **26**, 639–653 (1983).
 24. L. Quartapelle, Vorticity condition in the computation of two-dimensional viscous flows, *J. Comp. Phys.* **40**, 453–477 (1981).
 25. T. Phuoc-Loc, Numerical analysis of unsteady secondary vortices generated by an impulsively started circular cylinder, *J. Fluid Mech.* **100**, 111–128 (1980).
 26. O. Daube and T. Phuoc-Loc, Etude numérique d'écoulements instationnaires de fluide visqueux incompressible autour de corps profilés par une méthode combinée d'ordre $O(h^2)$ et $O(h^4)$, *J. Mécanique* **17**, 651–678 (1978).
 27. T. S. Luu and T. Phuoc-Loc, Développement d'une méthode de numérique pour la détermination de l'écoulement visqueux incompressible autour d'une grille d'aubes, *J. Mécanique* **5**, 483–507 (1981).
 28. E. L. Wachspress, *Iterative Solution of Elliptic Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1966).
 29. T. Phuoc-Loc, Etude numérique de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'un cylindre fixe ou en rotation. Effet Magnus, *J. Mécanique* **14**, 109–134 (1975).
 30. V. A. Patel, Karman vortex street behind a circular cylinder by the series truncation method, *J. Comp. Phys.* **28**, 14–42 (1978).
 31. M. Braza, H. Haminh, O. Brocard, D. Kalfon and P. Mazet, Comparison between three Navier–Stokes solvers. *Compte rendu du Symposium, Modélisation fine des écoulements*, Paris, pp. 17–26 (1982).
 32. F. Nieuwstadt and H. B. Keller, Viscous flow past circular cylinders, *Comput. Fluids* **1**, 59–71 (1973).
 33. B. Sunden, Conjugated heat transfer from circular cylinders in low Reynolds numbers flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* **23**, 1359–1367 (1980).
 34. I. Imai, On the asymptotic behaviour of viscous fluid flow at a great distance from a cylindrical body, with special reference to Filon's paradox, *Proc. R. Soc.* **208A**, 487–516 (1951).

STEADY MIXED CONVECTION FLOW ABOUT A HORIZONTAL CYLINDER

Abstract—Steady laminar mixed convection heat transfer is considered for an isothermal horizontal cylinder placed in a forced transverse flow. The study is based upon numerical solution of the complete Navier–Stokes equations. The implemented finite difference method is a combination of the compact hermitian method $O(h^4)$ for continuity equation and an $O(h^2)$ scheme for transport vorticity and energy equations. Low Reynolds numbers are considered ($Re \leq 40$) and the Gr/Re^2 parameter is of order unity. Results are presented for a Prandtl number equal to 0.73.

STATIONÄRE MISCHKONVEKTIONSSTRÖMUNG ÜBER EINEN HORIZONTALEN ZYLINDER

Zusammenfassung—Es wird der Wärmeübergang bei einer stationären laminaren Mischkonvektionsströmung an einem isothermen horizontalen Zylinder betrachtet, wobei eine erzwungene Queranströmung erfolgt. Grundlage der Untersuchung ist eine numerische Lösung der vollständigen Navier–Stokes-Gleichungen. Die angewandte Finite-Differenzenmethode ist eine Kombination der kompakten Hermitian-Methode $O(h^4)$ für die Kontinuitätsgleichung und ein $O(h^2)$ -Schema für die Transport- und Energiegleichungen. Es werden kleine Reynolds-Zahlen ($Re \leq 40$) betrachtet, und der Gr/Re^2 -Parameter hat die Größenordnung von eins. Die Ergebnisse werden für eine Prandtl-Zahl von 0,73 dargestellt.

СТАЦИОНАРНОЕ СМЕШАННОКОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ ОКОЛО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЦИЛИНДРА

Аннотация—Рассматривается стационарный смешанноконвективный теплообмен для случая изотермического горизонтального цилиндра, помещенного в вынужденный поперечный поток. Исследование основано на численном решении полных уравнений Навье–Стокса. Применяемый метод конечных разностей представляет собой сочетание аппроксимации четвертого порядка для уравнений неразрывности и второго порядка для уравнений переноса завихренности и энергии. Рассматриваются малые числа Рейнольдса ($Re \leq 40$) и параметр Gr/Re^2 порядка единицы. Представлены результаты для числа Прандтля $Pr = 0,73$.